Über geschlossene Raumkurven mit der Parameter-Darstellung x(t), für die [Kurvenintegral]x x dx = 0 gilt

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 45, 1994, S.29-34

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über geschlossene Raumkurven mit der Parameter-Darstellung x(t), für die $\oint x \times dx = 0$ gilt

Von **Hans Robert Müller***, Wolfenbüttel

(Eingegangen am 14.10.1994)

In einer früheren Untersuchung [1] hatte ich gezeigt, wie man mit Hilfe von trigonometrischen Polynomen bzw. Fourier-Reihen im 3-dimensionalen euklidischen Raum zu geschlossenen Raumkurven x(t) konstruktiv gelangen kann, deren Normalprojektionen auf beliebige Ebenen des Raumes zu ebenen Kurven vom orientierten Flächeninhalt Null führen. Kennzeichnend für diese Kurvenklasse ist $\oint x \times dx = 0$.

Vorweg einige Bemerkungen: Der Projektionsstrahl durch einen Punkt einer solchen Kurve x(t) mit $0 \leq t \leq T$ bildet eine Erzeugende eines geschlossenen Zylinders, der durch Variieren von t entsteht. Hierbei sind die ebenen Schnitte zum Normalschnitt (Normalprojektion) *affin*. Alle Aussagen über Normalprojektionen gelten daher auch für allgemeine Parallelprojektionen (Schrägrisse). Der affine Charakter der Kurveneigenschaft, verschwindende Projektionsinhalte zu besitzen, läßt erkennen, daß diese Eigenschaft auch jeder zu x(t) affinen Raumkurve zukommt.

Die Raumkurven x(t) setzen wir in der Folge stets als geschlossen mit der Periode T, sowie glatt – bei Bedarf genügend oft stetig differentierbar – und singularitätenfrei, also ohne mehrfache Punkte, stationäre Tangenten usf. voraus. Um noch einige Eigenschaften dieser Kurvenklasse zu zeigen, beschränken wir uns des einfacheren Beweisgangs wegen auf Normalrisse.

I

Eine geschlossene Raumkurve x(t), für die vorerst nicht notwendig $\oint x \times dx = 0$ sein soll, werde im Sinne wachsender Werte von t aus dem Intervall $0 \leq t \leq T$ durchlaufen. Die dadurch bewirkte Orientierung überträgt sich auf die Normalprojektion $x^n(t)$. Mit der Annahme von n als Einheitsvektor und der Projektionsebene ε durch den Ursprung o ist dann (vgl. [1])

$$x^n = x - (nx)n, \quad dx^n = dx - (n\,dx)n. \tag{1}$$

Nun denken wir uns durch die geschlossene Kurve x(t) ein singularitätenfreies Flächenstück (Flächenhaube) hindurchgelegt. Die Randkurve dieses Flächenstückes ψ bezeichnen wir mit $\partial\psi$; sie decke sich mit der Kurve x(t) und bewirke so eine Orientierung von ψ. Die Punkte x von ψ mögen durch Parameter u,v erfaßt werden: x = x(u,v). Im Parameterraum (u,v-Ebene) entspreche ψ einem Bereich Γ vom Zusammenhang eines Kreises. Für x(u,v) mögen die üblichen Differentierbarkeits- und Stetigkeitsvoraussetzungen der Flächentheorie gelten.

---

* Prof. em. Dr. H.R. Müller · Am Schiefen Berg 49 · 38302 Wolfenbüttel

Für das orientierte (mit einem Vorzeichen versehene) *skalare Flächenelement*

$$dF_o = W\, du \wedge dv \tag{2}$$

von ψ werde durch das Zeichen „$\wedge$" die alternierende Produktbildung der Differentiale angedeutet; der untere Index Null weise auf skalare Größen hin. Nun gilt bekanntlich

$$g_{11} = x_u^2,\ g_{12} = g_{21} = x_u \cdot x_v,\ g_{22} = x_v^2,\ W^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 .$$

Der Einheitsvektor

$$\zeta = \frac{1}{W}(x_u \times x_v) \tag{3}$$

erfaßt die Flächennormale auf ψ im Punkte x.

Dem skalaren Flächenelement d F_o stellen wir das *vektorielle Flächenelement*

$$d\,F = \frac{1}{2}\, dx \overset{\wedge}{\times} dx = \zeta \cdot d\,F_o \tag{4}$$

gegenüber und bezeichnen

$$F = \iint_\Gamma d\,F \tag{5}$$

als *Flächenvektor* von ψ.

Die geometrische Bedeutung von d F und F erkennt man jeweils durch Bildung des Skalarproduktes mit dem Vektor n in Richtung der Projektionsstrahlen:

$$d\,F_o^n = n \cdot d\,F = (n\zeta) \cdot d\,F_o \tag{6}$$

ist das skalare Flächenelement in der Ebene ε.

Analog zu (4) und wegen (6) bekommen wir im Normalriß das zugehörige „ebene" vektorielle Flächenelement

$$d\,F^n = \frac{1}{2}\, dx^n \overset{\wedge}{\times} dx^n = n \cdot d\,F_o^n . \tag{7}$$

In gleicher Weise finden wir als Flächeninhalt der Normalprojektion ψ_n von ψ

$$F_o^n = n \cdot F = n \cdot \iint_\Gamma d\,F . \tag{8}$$

Zur Umwandlung des Doppelintegrals in ein Randintegral wenden wir die *Stokes'sche Formel* an:

$$\iint_\Gamma d\Omega = \iint_{\partial\Gamma} \Omega . \tag{9}$$

Wir setzen $\Omega = x \times dx$, daraus wegen $d(dx) = 0$

$$d\,\Omega = dx \overset{\wedge}{\times} dx = 2\,d\,F.$$

Damit finden wir

$$2\iint_\Gamma d\,F = \oint_{\partial\Gamma} x \times dx \tag{10}$$

und

$$2\,F_o^n = 2\,n \cdot F = n \int_{\partial\Gamma} x \times dx . \tag{11}$$

Die Normalprojektion des in die geschlossene Kurve: x(t) *eingespannten Flächenstücks* ψ *besitzt (abgesehen vom Faktor 2) gleichen Flächeninhalt wie das von der Normalprojektion der Randkurve berandete Flächenstück in der Ebene* ε.

Im besonderen gilt: *Ist* x(t) *eine geschlossene Kurve mit verschwindendem Projektionsinhalt, d.h. mit* $\oint x \times dx = 0$, *so verschwindet auch der Inhalt der Projektion beliebiger Flächenhauben mit der Randkurve* x(t) *und umgekehrt.*

Unsere Kurvenklasse kann auch durch letztere Eigenschaft definiert werden.

II

Begleitend zur Ausgangskurve x(t) lenken wir unser Augenmerk auf die Kurve

$$y = y(t) = \int_{o}^{t} x \times dx\,, \tag{12}$$

die ebenfalls geschlossen ist, wenn dies für die Kurve x(t) gilt: $\oint x \times dx = 0$ besagt y(o) = y(T). Wie man sich durch einfache Rechnung überzeugen kann, hat diese Kurve y(t) die Windung (Torsion)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{(\dot{y}\;\ddot{y}\;\dddot{y})}{(\dot{y} \times \ddot{y})^2} = \frac{1}{x^2}\,. \tag{13}$$

Ist im besonderen x(t) eine *sphärische Kurve*, d.h. liegt sie auf einer Kugel x^2 = konst., dann hat die Kurve y(t) *konstante Torsion.*

Betrachten wir zur geometrischen Deutung der Vektorfunktion y(t) gemäß (1) den Normalriß in Richtung von n, so stellt

$$\frac{1}{2}\int_{o}^{t} (n\; x^n\; dx^n) = \frac{1}{2}\int_{o}^{t} (n\; x\; dx) = \frac{1}{2}\, n \cdot y(t) \tag{14}$$

den Flächeninhalt des vom Vektor x^n in ε überstrichenen Sektors zum Parameterwert t dar. Vgl. auch [2].

III

Unter einem *linearen Strahlenkomplex* oder *Strahlengewinde*, kurz Gewinde, versteht man die Gesamtheit von ∞^3 geraden Linien des dreidimensionalen projektiven Raumes, die durch Nullsetzen einer linearen Form in Plücker'schen Geradenkoordinaten beschrieben werden kann. Ein solches Strahlengewinde gestattet auch die euklidisch-metrische Erklärbarkeit als Gesamtheit der Bahnnormalen einer euklidischen Schraubung.

S. Lie [3] betrachtete als erster glatte Raumkurven, deren sämtliche Tangenten einem Gewinde angehören. Diese *Gewindekurven* besitzen viele interessante Eigenschaften.

Wir wollen hier untersuchen, wann geschlossene glatte Gewindekurven ohne mehrfache Punkte der von uns betrachteten Kurvenklasse angehören, d.h. zu Normalprojektionen mit verschwindendem orientierten Flächeninhalt führen.

Die Vektor-mäßige Zusammenfassung der *Plücker*'schen Koordinaten läßt die erwähnte lineare Form in der Gestalt

$$\bar{a} \cdot g + a \cdot \bar{g} = 0 \tag{15}$$

schreiben. Hierin werden die Gewindestrahlen durch g, $\bar{g}$ mit $g \cdot \bar{g} = 0$ erfaßt. Für die konstanten Vektoren a, $\bar{a}$ gelte jedoch $a \cdot \bar{a} \neq 0$, d.h. ausgeartete Gewinde (Strahlengebüsche) mögen außer Betracht bleiben.

Bei der mit dem Gewinde verbundenen Schraubung erfährt ein Raumpunkt x eine (Führungs-)Geschwindigkeit (Bahntangentenvektor)

$$x_f = \bar{a} + a \times x. \tag{16}$$

Hierbei fungiert a im Wesentlichen als *Darboux*'scher Drehvektor und $\bar{a}$ als Schiebkomponente. Für die Bahnnormalen g, $\bar{g}$ im Punkt x gilt $x_f \cdot g = 0$ oder ausführlich

$$\bar{a}\, g + (a \times x)\, g = 0. \tag{17}$$

Mit der Inzidenzbedingung von Punkt und Geraden

$$\bar{g} = x \times g \tag{18}$$

und wegen

$$(a \times x) \cdot g = (a\ x\ g) = a \cdot (x \times g) = a \cdot \bar{g}$$

bestätigen wir so auch die Gewindegleichung (15).

Im Falle einer Gewindekurve x(t) muß also die Kurventangente, d.h. $\dot{x}(t)$ an die Stelle von g in (17) treten, womit wir zur allgemeinen Form der Differentialgleichung der Gewindekurven gelangen:

$$\dot{x}\,(\bar{a} + a \times x) = 0. \tag{19}$$

Schreiben wir dies in der Form

$$\bar{a}\,\dot{x} + a\,(x \times \dot{x}) = 0 \tag{19'}$$

und integrieren wir diese Differentialgleichung längs der geschlossenen Kurve x(t), so erhalten wir

$$\bar{a} \oint \dot{x}\, dt + a \oint x \times \dot{x}\, dt = 0.$$

Nun ist $\oint \dot{x}\, dt = 0$ und daher

$$a \oint x \times \dot{x}\, dt = a \cdot v = 0. \tag{20}$$

Da nach [1] für den Projektionsinhalt F_n die Formel

$$2\, F_n = n \cdot v \tag{21}$$

gilt, verschwindet F_n für alle Richtungen n senkrecht zum jeweiligen Vektor $v \neq 0$. Zu diesen Richtungen gehören wegen (20) auch die Parallelen zur Gewindeachse der Richtung a.

Wird im besonderen die x_3-Achse eines cartesischen Koordinatensystems als Gewindeachse und damit der zugrunde gelegten Schraubung gewählt, so nimmt die Differentialgleichung (19) die Gestalt

$$x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 = c\, dx_3 \tag{22}$$

an. Es erfüllen also die Punkte $x = \sum e_i\, x_i$ und ihre Fortschreitungsrichtungen $dx_1 : dx_2 : dx_3$ längs einer Gewindekurve eine *Pfaff*'sche Differentialgleichung.

Die Konstante c deckt sich im Wesentlichen (Vorzeichen) mit dem Parameter der Schraubung und wird als Gewindeparameter bezeichnet. Vgl. auch [3], [4].

Wie in [1] führen wir bei zyklischen Anordnungen von i, j, k = 1, 2, 3

$$v_i = \oint (x_j\, dx_k - x_k\, dx_j) \tag{23}$$

zur Darstellung von

$$v = \oint x \times dx = \sum e_i\, v_i \tag{24}$$

ein. Aus (22) folgt nun

$$\oint dx_3 = 0, \tag{25}$$

sowie

$$v_3 = \oint (x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1) = 0. \tag{26}$$

Die periodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ mit der Periode $T = 2\pi$ müssen der Bedingung (26) genügen, sie können nicht willkürlich gewählt werden, d.h. als Grundriß einer geschlossenen Gewindekurve kann nicht jede ebene geschlossene Kurve dienen, sie muß vielmehr den orientierten Flächeninhalt Null umranden. $v_3 = 0$ besagt auch – wie schon festgestellt –, daß die Normalprojektion der Gewindekurve in Richtung der Gewindeachse zum Projektionsinhalt Null führt. Dies wurde auch schon auf andere Weise (vgl. [2], [4]) gefunden.

Ist für eine Gewindekurve auch noch $v_1 = v_2 = 0$ erfüllt, so gehört sie zu der von uns betrachteten Kurvenklasse verschwindender Projektionsinhalte für beliebige Projektionseinrichtungen.

Das folgende einfache Beispiel

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \sin t + \cos 2t \\ x_2 &= 2\cos t + \sin 2t \\ x_3 &= 3\cos t + \cos 3t \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

liefert jedoch, wie man leicht sieht, $v_3 = v_1 = 0$, $v_2 = 6\pi$. Somit gehört also nicht jede geschlossene Gewindekurve unserer Kurvenklasse an.

Die in [1] verwendeten Ansätze mittels trigonometrischer Polynome bzw. Fourier-Reihen

$$x_i = \frac{a_{i0}}{2} + \sum_{\nu} (a_{i\nu} \cos \nu t + b_{i\nu} \sin \nu t) \tag{28}$$

für i = 1, 2, 3 erbrachten Formeln

$$v_i = 2\pi \sum_\nu \nu\,(a_{j\nu}\, b_{k\nu} - a_{k\nu}\, b_{j\nu}), \tag{29}$$

mit deren Hilfe in Beispiel (27) die Koeffizienten $a_{i\nu}$, $b_{i\nu}$ so gewählt wurden, daß $v_3 = v_1 = 0$, $v_2 \neq 0$ ausfielen.

In gleicher Weise kann man Gewindekurven konstruieren, für welche die Nulleigenschaft der Projektionsinhalte für alle Richtungen oder nur eingeschränkt gilt.

Zusammenfassend läßt sich somit sagen:

Geschlossene Gewindekurven haben die Eigenschaft, entweder im Falle $v = 0$ *für jede Produktionsrichtung* n *oder aber für jede Projektionsrichtung* n *senkrecht zum Flächenvektor* $v = \oint x \times dx \neq 0$ *zum Projektionsinhalt Null zu führen. Zu letzteren Projektionsrichtungen zählen im besonderen die Parallelen zur Gewindeachse.*

Die Betrachtung von geschlossenen Raumkurven des dreidimensionalen Raumes mit euklidischer Maßbestimmung, deren Parallelprojektionen auf beliebige Ebenen des Raumes ebene Kurven vom orientierten Flächeninhalt Null sind, fußt nach [1] auf der kennzeichnenden Bedingung der Parameterdarstellung der Ausgangskurve x(t) für $0 \leq t \leq 2\pi$, daß der Vektor

$$v = \oint x \times dx = 0$$

ist.

Diese Forderung an eine geschlossene Raumkurve gestattet auch eine Deutung im Rahmen der *Statik*:

In den Punkten x(t) der Raumkurve möge jeweils die *Kraft*

$$dx = \dot{x}(t)\, dt$$

angreifen. Dann befindet sich der starre Körper, dargestellt von unserer Raumkurve, im *statischen Gleichgewicht*, wenn die „Vektorsumme" aller angreifenden *äußeren Kräfte* verschwindet, d.h.

$$\oint dx = \oint \dot{x}(t)\, dt = 0$$

und die „Vektorsumme" der *Drehmomente* ebenfalls Null ist, d.h.

$$v = \oint x \times dx = 0$$

gilt.

Literaturverzeichnis

[1] Müller, H. R.: Geschlossene Raumkurven mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt. Abhandl. d. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 43 (1992), 7–12.

[2] Müller, H. R.: Gewindekurven und ebene Kinematik. Abhandl. d. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 34 (1982), 39–45.

[3] Lie, S. und Scheffers, G.: Geometrie der Berührungstransformationen. Teubner, Leipzig 1896.

[4] Müller, H. R.: Über zwei altbekannte Klassen von Raumkurven. Jugoslav. Akad. Zanosti i Umjetnosti, Zagreb (1983), 91–96.